Аксиоматика процентных ставок

Ю.В. Козырь

Введение

По сложившейся традиции при рассмотрении структуры процентной ставки в части ее дальнейшего использования в качестве ставки дисконтирования чаще всего используются следующие зависимости:

- выражение Ирвинга Фишера:

$$r = (1 + r_r) \cdot (1 + i) - 1, \qquad (1)$$

где r – номинальная ставка процента,
r_r - реальная ставка процента,
i – уровень инфляции за период,

а также разложение ставки на безрисковую ставку и премию за риск:

$$r = r_f + pr, \qquad (2)$$

где r – ставка процента характерная для будущих денежных потоков проекта (актива) имеющего определенный риск инвестирования,
r_f - ставка процента по безрисковым вложениям,
pr - премия за риск инвестирования в подобные проекты (активы).

Таким образом, из работ классиков можно сделать вывод, что уровень процентной ставки является функцией очищенной от инфляции безрисковой ставки, инфляции и компенсации (премии) за риск:

$$r = r_{fr} + i + pr_{ar}, \qquad (3)$$

$$r = (1 + r_{fr}) \cdot (1 + i) \cdot (1 + pr_{mr}) - 1, \qquad (4)$$

где r – номинальная процентная ставка, применяемая для приведения посленалоговых потоков рискового проекта (рисковых денежных потоков),
r_{fr} - очищенная от инфляции безрисковая ставка процента,
pr_{ar} - премия за риск, применяемая при использовании аддитивной модели вида (3) при отдельном учете инфляционной составляющей,
pr_{mr} - премия за риск, применяемая при использовании мультипликативной модели вида (4) при отдельном учете инфляционной составляющей.

Очевидно, что между pr_{ar} и pr_{mr} существует следующая зависимость:

$$pr_{mr} = \frac{pr_{ar} - r_{fr} i}{(1 + r_{fr})(1 + i)}. \qquad (5)$$

Рассмотрим пример с применением выражений (2)-(5). Пусть известно, что инвесторы субъективно оценивают номинальную ставку дисконтирования с учетом риска проекта на уровне 25% при инфляции 15%. Тогда при этих условиях из (3) следует, что субъективная оценка реальной безрисковой ставки и премии за риск pr_{ar} составляет 10%. Если допустить, что реальная безрисковая ставка оценивается на уровне 2%, то на долю премии pr_{ar} за риск будет приходиться 8%. Подстановка указанных значений в (5) позволяет получить значение премии за риск pr_{mr}, которую можно применять при использовании выражения (4):

$$pr_{mr} = \frac{0{,}08 - 0{,}02 \cdot 0{,}15}{(1 + 0{,}02)(1 + 0{,}15)} = 0{,}0656 = 6{,}56\%.$$

Алгебра процентных ставок -1 (АПС-1)

Более детальное изучение структуры процентных ставок приводит к пониманию того, что количество представлений структуры процентной ставки может быть больше, чем одни лишь выражения (1)-(4). Это объясняется следующими факторами:

- безрисковая ставка может быть представлена в номинальном (r_f) и реальном исчислении (r_{fr});
- безрисковая ставка может включать в себя элементы риска (r_f и r_{fr}), а может и не включать (r_{nf} и r_{nfr});
- премия за риск может быть представлена для аддитивной (pr_a) или мультипликативной (pr_m) моделей процентной ставки;
- премия за риск может быть представлена в номинальном (pr) или реальном (pr_r) исчислении;
- премия за риск может использоваться совместно с безрисковыми ставками учитывающими элементы риска - r_f, r_{fr} (в этом случае премию за риск будем обозначать pr^{sup}), равно как и с абсолютно безрисковыми ставками - r_{nf}, r_{nfr} (в этом случае премию за риск будем обозначать без верхнего индекса «*sup*» - pr).

С учетом сделанных замечаний представим ниже возможные уточненные варианты структуры процентных ставок, применяемых для дисконтирования рисковых потоков (для случаев, когда параметры риска отражаются в ставке дисконтирования, а не посредством предварительной корректировки денежных потоков):

$$r = r_{nfr} + i + pr_{ar}, \qquad (6)$$

$$r = r_{nfr} + pr_a, \qquad (7)$$

$$r = r_{fr} + i + pr_{ar}^{\sup}, \qquad (8)$$

$$r = r_f + pr_{ar}^{\sup}, \qquad (9)$$

$$r = (1 + r_{nf})(1 + pr_{mr}) - 1, \qquad (10)$$

$$r = (1 + r_{nfr})(1 + pr_{mr})(1 + i) - 1, \qquad (11)$$

$$r = (1 + r_f)(1 + pr_{mr}^{\sup}) - 1, \qquad (12)$$

$$r = (1 + r_{fr})(1 + pr_{mr}^{\sup})(1 + i) - 1, \qquad (13)$$

$$r = (1 + r_{nfr})(1 + pr_m) - 1, \qquad (14)$$

$$r = (1 + r_{fr})(1 + pr_m^{\sup}) - 1, \qquad (15)$$

где

- где r – номинальная ставка процента, учитывающая риски,
- r_{nfr} - абсолютно безрисковая реальная (не учитывающая инфляцию) ставка,
- r_{nf} - абсолютно безрисковая номинальная ставка,
- i - уровень инфляции,
- r_f – номинальная безрисковая ставка при минимально возможном уровне риска,
- pr_{mr} – полная премия за риск при мультипликативном представлении без учета инфляции,
- pr_m – полная премия за риск при мультипликативном представлении с учетом инфляции,
- pr_{ar} – полная премия за риск при аддитивном представлении без учета инфляции,
- pr_a – полная премия за риск при аддитивном представлении, включающая инфляцию,
- $pr^{sup}{}_m$ - часть премии за риск с учетом инфляции, не включенная в безрисковую ставку r_f, при мультипликативном представлении,
- $pr^{sup}{}_{mr}$ – часть премии за риск без учета инфляции, не включенная в безрисковую ставку r_f, при мультипликативном представлении,
- $pr^{sup}{}_a$ - часть премии за риск с учетом инфляции, не включенная в безрисковую ставку r_f, при аддитивном представлении,
- $pr^{sup}{}_{ar}$ – часть премии за риск без учета инфляции, не включенная в безрисковую ставку r_f, при аддитивном представлении.

Алгебра процентных ставок -2 (АПС-2)

Поскольку в реальной жизни практически всегда приходится оперировать (иметь дело) лишь с наблюдаемыми безрисковыми ставками, которые содержат (могут содержать) элементы риска (то есть, говоря по-другому, у нас нет данных о значениях абсолютно безрисковых рыночных процентных ставках r_{nfr} и r_{nf}), из представленных выше выражений (6)-(13) практическую ценность представляют лишь выражения, в которых не содержатся параметры абсолютно безрисковых ставок (r_{nfr} и r_{nf}), т.е. выражения (8)-(9), (12)-(13), (15). Однако поскольку во всех этих выражениях в обозначении премии за риск ранее был включен верхний индекс «*sup*», для большей практичности имеет смысл отказаться от использования этого индекса. Чтобы не вводить путаницу в рамках настоящей статьи, введем новые обозначения, отменив индекс «*sup*» и поменяв прописные буквы на заглавные (можно, конечно, использовать и прописные буквы, помня при этом, что используемое значение премии за риск является не полным, поскольку часть его «зашита» в используемом эквиваленте наблюдаемой безрисковой ставки):

$$R = r_{fr} + i + \mathrm{Pr}_{ar}, \qquad (16)$$

$$R = r_f + \mathrm{Pr}_{ar}, \qquad (17)$$

$$R = (1 + r_f)(1 + \mathrm{Pr}_{mr}) - 1, \qquad (18)$$

$$R = (1 + r_{fr})(1 + \mathrm{Pr}_{mr})(1 + i) - 1, \qquad (19)$$

$$R = (1 + r_{fr})(1 + \mathrm{Pr}_m) - 1, \qquad (20)$$

где R соответствует r , а Pr – pr^{sup} в ранее приведенных выражениях (6)-(15).

Рассмотрим ранее приведенный пример с применением выражений (16)-(20). Напомним его условия. Известно, что инвесторы субъективно оценивают номинальную ставку дисконтирования с учетом риска проекта на уровне 25% при инфляции 15%. Пусть подразумеваемая реальная безрисковая ставка равна 2%. Тогда из (16) следует, что значение подразумеваемой премии за риск (Pr_{ar}) составляет 8%. Значение номинальной безрисковой ставки без учета сложных процентов составит: 2% + 15% = 17%. Значение номинальной безрисковой ставки с учетом сложных процентов составит:

$$r_f = (1 + r_{fr})(1 + i) - 1 = (1 + 0{,}02)(1 + 0{,}15) - 1 = 0{,}173 = 17{,}3\%.$$

Значение Pr_{ar} определим из (17):

- в случае использования простых процентов при оценке безрисковой ставки:

$$\mathrm{Pr}_{ar} = R - r_f = 0{,}25 - 0{,}17 = 0{,}08 = 8\%;$$

- в случае использования сложных процентов при оценке безрисковой ставки:

$$\mathrm{Pr}_{ar} = R - r_f = 0{,}25 - 0{,}173 = 0{,}077 = 7{,}7\%.$$

Значение Pr_{mr} определим из (18):

- в случае использования простых процентов при оценке безрисковой ставки:

$$\mathrm{Pr}_{mr} = \frac{1 + R}{1 + r_f} - 1 = \frac{1 + 0{,}25}{1 + 0{,}17} - 1 = 0{,}068 = 6{,}8\%.$$

- в случае использования сложных процентов при оценке безрисковой ставки:

$$\mathrm{Pr}_{mr} = \frac{1 + R}{1 + r_f} - 1 = \frac{1 + 0{,}25}{1 + 0{,}173} - 1 = 0{,}066 = 6{,}6\%.$$

Значение Pr_m определим из (20):

$$\mathrm{Pr}_{m} = \frac{1 + R}{1 + r_{fr}} - 1 = \frac{1 + 0{,}25}{1 + 0{,}02} - 1 = 0{,}225 = 22{,}5\%.$$

Замечания о безрисковой ставке

Безрисковая ставка – это ставка процента в отсутствие рисков. Обычно в качестве наблюдаемых безрисковых ставок используются процентные ставки по правительственным облигациям. Однако следует иметь в виду, что облигации подвержены инфляционному риску (наблюдаются номинальные, а не реальные ставки) и они чуть менее ликвидны, чем деньги. К тому же, в процентных ставках облигаций некоторых стран «зашит» риск дефолта (достаточно вспомнить опыт России образца 1998 г.). Если убрать все возможные риски (инфляцию, неликвидность, дефолт), то сухим остатком будет абсолютно безрисковая ставка (обозначим ее r_{nfr}). Какова природа этой ставки? Эта ставка зиждется на двух взаимодополняющих факторах.

Во-первых, деньги сегодня стоят дороже, чем эти же деньги завтра (послезавтра и в последующие периоды). Если вы кому-то даете взаймы на определенный срок, значит, скорее всего, в течение этого срока вы будете терпеть определенные лишения (меньше тратить на повседневную жизнь, откладывать некоторые покупки на будущее).

Во-вторых, нельзя скидывать со счетов ростовщический фактор: если кто-то просит у вас денег взаймы, значит, идя на это, заемщик (берущий деньги) рассчитывает на то, что получив и затем возвратив деньги в назначенный срок, он получит выгоду. Разумеется, вы тоже это осознаете, и со своей стороны вполне резонно рассчитываете на «справедливую аннексию» части полученной заемщиком выгоды в свою пользу («делиться надо!» - А.Я. Лившиц).

К сожалению, определение значения абсолютно безрисковой ставки (r_{nfr}) является отдельной проблемой требующей постоянного мониторинга потребительских и инвестиционных предпочтений индивидуумов. Поэтому на практике обычно применяются те или иные суррогаты этой ставки, чаще «разбавленные» инфляцией, т.е. обычно выбираются те или иные ориентиры номинальной безрисковой ставки – наиболее часто ставки доходности по правительственным облигациям.

Если все-таки под безрисковой ставкой понимать доходность инвестиций с максимально возможными диверсифицированными рисками, наилучшим показателем такой доходности является темп роста экономики: реальный темп роста экономики (темп роста ВВП) - для реальной безрисковой ставки, номинальный темп роста экономики (темп роста ВВП с учетом инфляции) – для номинальной безрисковой ставки.

Как следует из последних двух абзацев, на практике могут применяться два ориентира номинальной безрисковой ставки: доходность правительственных облигаций и номинальный темп роста экономики. По моему мнению, проблемы при выборе в качестве безрисковой ставки доходности правительственных облигаций возникают в тех случаях, когда уровень инфляции превышает доходность этих финансовых инструментов. То есть, если при инфляции 15% кто-то сначала возьмет в качестве безрисковой ставки доходность облигаций на уровне 7%, а потом в рамках кумулятивного подхода «обоснует» суммарные рисковые надбавки в размере 5-6%, вряд ли полученное таким образом значение номинальной ставки дисконтирования будет соответствовать основополагающему принципу корпоративных финансов: деньги полученные/уплаченные сегодня, стоят дороже денег полученных/уплаченных завтра.

Учет возможностей банкротства, дефолта или неплатежей

Рассмотрим теперь влияние риска на ставку дисконтирования под другим углом. Условие отсутствия возможностей арбитражных операций (или условие невозможности существования денежного станка) можно выразить следующими способами:

$$r \cdot (1 - p_d) + (-k) \cdot p_d = r_f, \qquad (21)$$

$$(1 + r) \cdot (1 - p_d) + (1 - k) \cdot p_d = 1 + r_f, \qquad (22)$$

где p_d – вероятность банкротства/дефолта (или просто неуплаты), k – доля потерь при наступлении банкротства/дефолта.

Из (21) и (22) можно получить выражение, связывающее рисковую ставку с безрисковой ставкой и параметрами риска:

$$r = \frac{r_f + p_d \cdot k}{1 - p_d}. \qquad (23)$$

Из (23) можно получить выражение для премии за риск:

$$pr = r - r_f = \frac{r_f + p_d \cdot k}{1 - p_d} - r_f = \frac{p_d (k + r_f)}{1 - p_d}. \qquad (24)$$

С другой стороны, зависимость между рисковой ставкой и параметрами риска можно получить исходя из иных соображений:

$$\frac{1}{1+r} = \frac{1-p_d \cdot k}{1+r_f}, \qquad (25)$$

где числитель правой части уравнения отражает корректировку ожидаемых денежных потоков, трансформирующую их в так называемый надежный эквивалент денежных средств (*CEQ*). Преобразование выражения (25) относительно r приводит к следующему выражению для рисковой ставки:

$$r = \frac{r_f + p_d \cdot k}{1-p_d \cdot k}. \qquad (26)$$

Из (26) также можно получить выражение для премии за риск:

$$pr = r - r_f = \frac{r_f + p_d \cdot k}{1-p_d \cdot k} - r_f = \frac{p_d \cdot k \cdot (1+r_f)}{1-p_d \cdot k}. \qquad (27)$$

Рассмотрим пример с применением выражений (23),(26). Пусть известно, что инвесторы субъективно оценивают вероятность дефолта в течение ближайшего года равную 10%, при этом в случае наступления дефолта, как ожидается, потери могут составить 50%. Пусть также известно, что номинальная безрисковая ставка оценивается на уровне 17%. Определим значение рисковой ставки дисконтирования с применением выражений (23) и (26). Используя выражение (23), получим:

$$r = \frac{r_f + p_d \cdot k}{1-p_d} = \frac{0{,}17 + 0{,}1 \cdot 0{,}5}{1-0{,}1} = 0{,}244 = 24{,}4\%.$$

Используя выражение (26), получим:

$$r = \frac{r_f + p_d \cdot k}{1-p_d \cdot k} = \frac{0{,}17 + 0{,}1 \cdot 0{,}5}{1-0{,}1 \cdot 0{,}5} = 0{,}232 = 23{,}2\%.$$

Как видно, при всей схожести выражений (23) и (26), они не являются идентичными. Я пока не могу однозначно объяснить существующее расхождение в этих формулах. Уже после вывода данных формул при подготовке к одному из семинаров мною было обнаружено, что в русскоязычном издании книги У. Шарпа и соавторов «Инвестиции» (Изд. Инфра-М, Москва, 1997) на стр. 432-433 со ссылкой на работу Гордона Пая (*Gordon Pye “Gauging the Default Premium”, Financial Analysts Journal, 30, no.1 (January/February 1974), pp. 423-434*) приведено выражение, практически идентичное выражению (23), которое, как указано в книге, может использоваться для определения доходности подверженных риску облигаций. Ниже приведен соответствующий отрывок из книги У. Шарпа и соавторов «Инвестиции».

«*Насколько высокой должна быть премия за риск неплатежа по облигации? Согласно одной модели (см. выше приведенную ссылку на работу Гордона Пая – прим. Ю.К.), ответ зависит и от вероятности неуплаты, и от размеров возможных финансовых потерь держателей облигаций в этом случае. Рассмотрим облигацию, вероятность* *неуплаты по которой одинакова каждый год (при условии, что в прошлом году выплата состоялась). Вероятность неуплаты по ней в любой данный год обозначим p_d. Допустим, что в случае невыполнения обязательства владельцу каждой облигации будет выплачена часть, равная (1 - λ) ее рыночной цены год назад. Согласно этой модели, облигация будет правильно оцененной, если ее обещанная доходность к погашению y равняется:*

$$y = \frac{\bar{y} + \lambda p_d}{1 - p_d}, \qquad (28^i)$$

где y обозначает ожидаемую доходность к погашению облигации. Разница d между обещанной доходностью к погашению y и ожидаемой доходностью $\bar{y}$ была упомянута ранее как премия за риск неуплаты. Используя уравнение (28), получим, что для правильно оцененных облигаций эта разница будет равняться:

$$d = y - \bar{y} = \left(\frac{\bar{y} + \lambda p_d}{1 - p_d}\right) - \bar{y}. \text{ »} \qquad (29)$$

(конец цитирования).

Завершая статью, хочется отметить, что действие закона нарастания энтропии пока еще никто не отменял: применительно к обсуждаемой в статье теме можно смело утверждать, что каждый ответ на ранее заданный вопрос порождает не менее одного нового вопроса.

[i] Для сохранения единого стиля изложения статьи нумерация последних двух формул изменена по сравнению с нумерацией цитируемого источника – прим. Ю.